★今週の1題★　平方数･立方数の総和　～解説～

〈解説〉

(１)１番目～N 番目までの平方数の和は以下の式で求めることができます。

$$\frac{N\times\left(N+1\right)\times\left(2\times N+1\right)}{6}\quad\cdots①$$

これが１００の倍数になるためには分母に６があるので分子が２００の倍数である必要があります。

N と N+１のどちらかが偶数、２×N+１は奇数なので、

・N か N+１のどちらかが８の倍数

・N,N+１,２×N+１のどれかが２５の倍数

の両方を満たす N を見つければ良いことになります。

N＝２４,N+１＝２５,２×N+１＝４９

が N が１番小さいときです。次に小さいのが

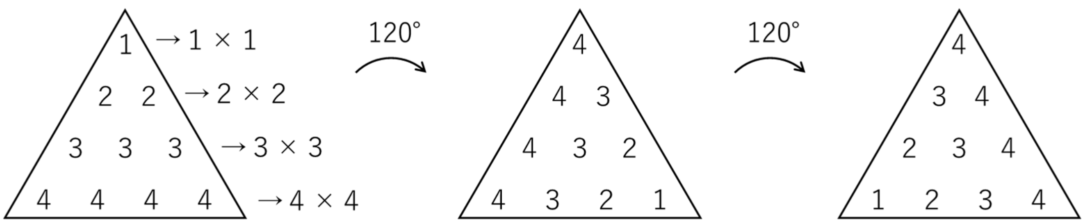
N＝８７,N+１＝８８,２×N+１＝１７５

なので、

（答）　８７

※　なぜ①の式が成り立つのか考えてみます。本文でとりあげた栄東の問題と同じようなことをします。

「4」を例に考えてみましょう。



３つを重ねて数字を足すと全て「9」になっています。

9 を求める式の例　→　1+4+4=9

よって、１番目から４番目までの平方数の和は

$$\left(1+4\times2\right)\times\frac{\left(1+4\right)\times4}{2}\times\frac{1}{3}=30$$ と求めることができます。

これを１番目から N 番目までの平方数の和に適用すると

$$\left(1+2\times N\right)\times\frac{\left(1+N\right)\times N}{2}\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{N\times\left(N+1\right)\times（2\times N+1）}{6}$$

（２）少し調べます。

番目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	１０
その個数（個）	1	8	２７	６４	１２５	２１６	３４３	５１２	７２９	１０００
個数の合計（個）	1	9	３６	１００	２２５	４４１	７８４	１２９６	２０２５	３０２５
式	1 × 1	3 × 3	6 × 6	10×10	15×15	21×21	28×28	36×36	45×45	55×55

一番下の段の式が《三角数の平方数》になっていることから、　１番目～N 番目までの立方数の和は以下の式で求めることがでると考えられます。

$$\frac{\left(1+N\right)\times N}{2}\times\frac{\left(1+N\right)\times N}{2}$$

これが１００００の倍数になるためには $\frac{\left(1+N\right)\times N}{2}$ が１００の倍数になればよく、さらに（１）と同じように考えれば

・N か N+１のどちらかが８の倍数

・N,N+１のどちらかが２５の倍数

の両方を満たす N を見つければ良いことになります。

N=２４,N+１=２５

が N が１番小さいときです。次に小さいのが

N=１７５,N+１=１７６

なので、

（答）　１７５