



このタイプの問題は「互いに素な2数に分ける方法の組み合わせ」で解くのが一般的かもしれませんが、今回は別の方法でやってみます。

(1) 42 を素因数分解すると

$$42 = 2 \times 3 \times 7$$

なので、42 の中で、2 でも 3 でも 7 でも割り切れない数がいくつあるかを求め、それを 2 で割ったもの(端数は切り捨て)が答です。

異なる3個の素数の最小公倍数の中で、どの3数でも割り切れない数の個数は、それぞれの数字から 1 を引いたものの積で求めることができます。

$$(2 - 1) \times (3 - 1) \times (7 - 1) = 12$$

$$12 \div 2 = 6(\text{通り}) \quad \dots(\text{答})$$

(2) $240 \times 2 = 480$

$$480 + 1 = 481$$

なので、481 が素数ならば、それが最小値なのですが、

$$481 = 13 \times 37 \quad \dots\textcircled{1}$$

なのでだめです。

また、 $\textcircled{1}$ より素数から 1 を引いたもの同士の積が 481 になることはないので、480 のケースを考えれば良いことになります。

480 の約数のうち 1 を足して素数になるのは

約数	1	2	4	6	10	12	16	30	40	60	96	240
	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
素数	2	3	5	7	11	13	17	31	41	61	97	241

の12個です。

例えば、

$$12 \times 40 = 480$$

なので

$$13 \times 41 = 533$$

は240通りの結び方があることになります。

このような2数の積の中で最小になるものを調べると、

$$16 \times 30 = 480$$

より、

$$17 \times 31 = 527 \quad \dots\text{最小値}$$

実際にこれより小さい数はありません。

また、

$$2 \times 2 \times 241 = 964 \quad \dots\text{最大値}$$

$$1 \times 240 = 240$$

より1~482のうち2でも241でも割り切れない数が240個あるので、

その2倍の964は240通りの結び方があります。

これ以上大きな3桁の数はありません。

(答)最小値:527、最大値:964

【素数 A、B、C の積「 $A \times B \times C$ 」の中で、A でも B でも C でも割り切れない数の求め方】

A で割り切れる数のうち、A で割り切れる数の割合は

$$\frac{1}{A}$$

なので A で割り切れない数の割合は

$$1 - \frac{1}{A}$$

になります。

「 $A \times B \times C$ 」の中で A でも B でも C でも割り切れない数は、

それぞれの割合の積で求めることができるので

$$A \times B \times C \times \left(1 - \frac{1}{A}\right) \times \left(1 - \frac{1}{B}\right) \times \left(1 - \frac{1}{C}\right)$$

$$= A \times B \times C \times \frac{A-1}{A} \times \frac{B-1}{B} \times \frac{C-1}{C}$$

$$= (A-1) \times (B-1) \times (C-1)$$

となります。