★今週の1題★　平面図形と場合の数　～解説～

（1）は六角形で出題されていたものを九角形にアレンジしました。
単なる書き出しでは苦しい問題になりました。
（2）は中学入試のレベルは超えていますが、数え上げる練習になります。
場合分けをした後を自分でやってみると良いでしょう。

（1）九角形の対角線の本数は公式を利用して

$$\frac{(9-3)\times 9}{2}=27（本）$$

と求めます。
3個の部分に分割されるように2本の対角線を引くには、2本が交わらないことが条件です。
まともにやると大変なので「余事象」を利用します。
まず対角線2本の選び方は27本から2本を選ぶ組み合わせなので、

$$\frac{27\times 26}{2\times 1}=351（通り）$$

となり、この中から2本が交わるような引き方を引けば良いことになります。
交わる対角線2本の選び方は対角線の交点に対応しているので、
対角線を引く頂点4つの選び方に行きつきます。
これは9個の中から4個を選ぶ組み合わせなので

$$\frac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1}=126（通り）$$

よって求める場合の数は

$351-126=225$（通り）　・・・（答）

（2）まず引く対角線の本数で場合分けします。
3本引く場合はそのうち2本が交わり、4本引く場合は交わりません。

i）　対角線を3本引く場合

1本対角線を引いた時点で、残りの2本の対角線を引く多角形と引かない多角形に分かれます。
以下、引かない多角形で分類します。
円順列とみなしてそれぞれを求め、最後に合計を9倍します。

①　三角形

残る多角形は「$9+2-3=8$」より八角形なので、
8個の中から4個を選ぶ組み合わせとなります。

$$\frac{8\times 7\times 6\times 5}{4\times 3\times 2\times 1}=70（通り）$$

②　四角形

残る多角形は七角形となり、7個の中から4個を選ぶ組み合わせとなります。
これは7個の中から3個を選ぶ組み合わせと同じなので、

$$\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}=35（通り）$$

③　五角形

②より1つ減るので、6個の中から2個を選ぶ組み合わせになります。

$$\frac{6\times 5}{2\times 1}=15（通り）$$

④　六角形　→　5 通り

⑤　七角形　→　1 通り

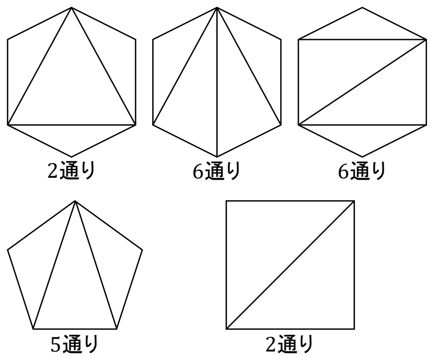
ここまでの合計は

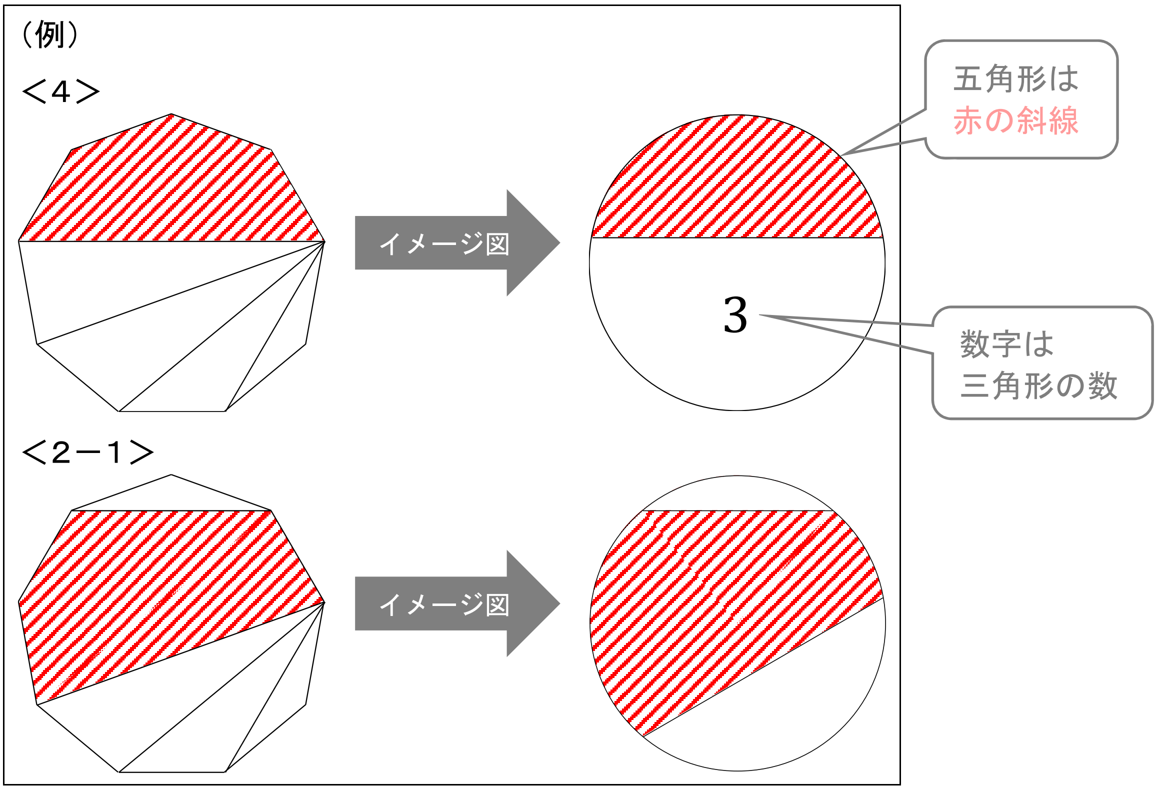
$70+35+15+5+1=126$（通り）

ii）対角線を4本引く場合
こちらも円順列とみなしそれぞれを求め、最後に合計を9倍します。
4本の場合はどれも交わりません。
分割された5個の多角形の辺の合計は
$9 + 4 \times 2 = 17$（本）
です。
$17 \div 5 = 3 \dots 2$
より
A　…　五角形1個、三角形4個
B　…　四角形2個、三角形3個
に分類することができます。
以下、A、Bそれぞれを求めます。

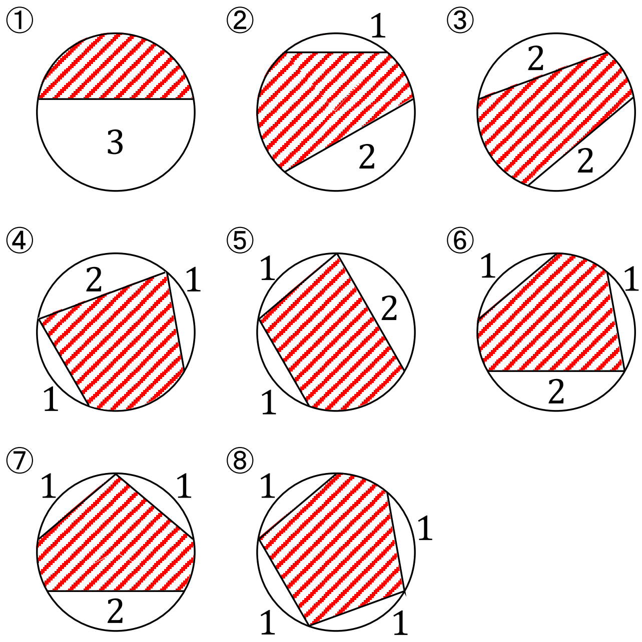
【Aの場合】
五角形の辺が元の正九角形の辺といくつ重なるかで分類すると、
＜4＞、＜3＞、＜2−1＞、＜2＞、＜1−1＞、＜1＞の 6 つが考えられます。

右の図より、
六角形を 4 つの三角形に分割するのは
$2 + 6 + 6 = 14$（通り）
五角形を 3 つの三角形に分割するのは
5 通り
四角形を 2 つの三角形に分割するのは
2 通り
であることをふまえ、
イメージ図で分類し、数えていきます。





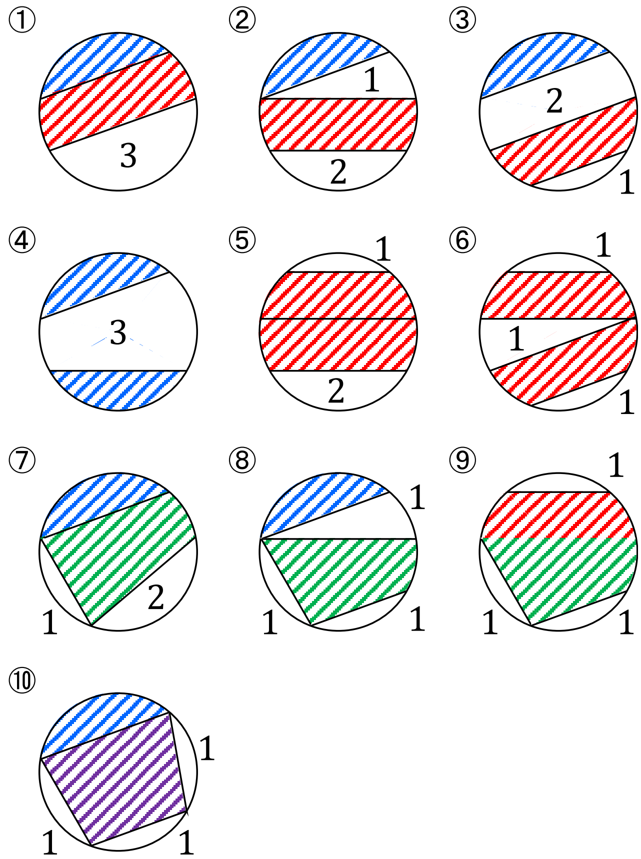
① ＜4＞
14 通り
② ＜3＞または＜2－1＞（その1）
$2 \times 2 \times 5 = 20$（通り）
③ ＜3＞または＜2－1＞（その2）
$2 \times 2 \times 2 = 8$（通り）
④ ＜2＞（その1）
2 通り
⑤ ＜2＞（その2）
$2 \times 2 = 4$（通り）
⑥ ＜1－1＞（その1）
$2 \times 2 = 4$（通り）
⑦ ＜1－1＞（その2）
2 通り
⑧ ＜1＞
1 通り



①～⑧より【Aの場合】の合計は
$14 + 20 + 8 + 2 \times 2 + 4 \times 2 + 1 = 55$（通り）

【Bの場合】
四角形は、＜3＞、＜2＞（＜1－1＞を含む）、＜1＞、＜0＞が考えられ、
それら 2 つの組み合わせをイメージ図で分類します。

① ＜3＞＋＜2＞（その1）
$3 \times 5 = 15$（通り）
② ＜3＞＋＜2＞（その2）
$2 \times 3 \times 2 = 12$（通り）
③ ＜3＞＋＜2＞（その3）
$3 \times 2 \times 3 = 18$（通り）
④ ＜3＞＋＜3＞
$2 \times 5 = 10$（通り）
⑤ ＜2＞＋＜2＞（その1）
$3 \times 3 \times 2 = 18$（通り）
⑥ ＜2＞＋＜2＞（その2）
$3 \times 3 = 9$（通り）
⑦ ＜3＞＋＜1＞（その1）
$2 \times 2 \times 2 = 8$（通り）
⑧ ＜3＞＋＜1＞（その2）
$2 \times 2 = 4$（通り）
⑨ ＜2＞＋＜1＞
$3 \times 2 = 6$（通り）
⑩ ＜3＞＋＜0＞
1 通り



①～⑩より、【Bの場合】の合計は
$15 + 12 + 18 \times 2 + 10 + 9 + 8 + 4 + 6 + 1 = 101$（通り）

i）、ii）より、求める場合の数は
$(126 + 55 + 101) \times 9 = 2538$（通り）…（答）