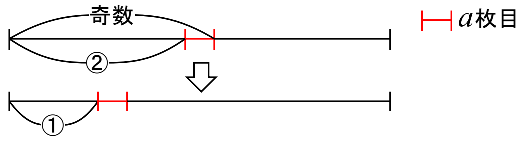
★今週の1題★　規則性　～解説～

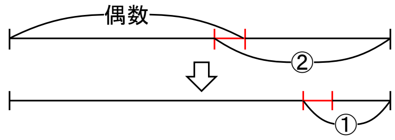
I.　【規則1】について少し調べておきます。

i)　N が奇数の場合、左から a 枚目のカードがどこに移動するかを調べます。

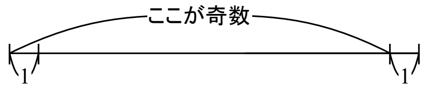
①　a が奇数の場合
a 枚目よりも左にあるカードの枚数が
半分になります。



②　a が偶数の場合
a 枚目を含め、その右にあるカードの枚数が
半分になります



ii)　N が偶数の場合（1 を引けば奇数のときと同じになる）
両端の位置は変わらないので、いちばん右のカードを
除いて考えると、i) の場合と同じになります。

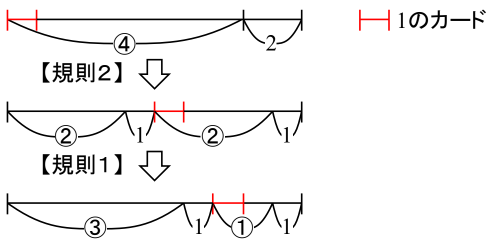


II.　「1」がどのように移動するかに着目します。
【規則1】の操作を何回やってもいちばん左のカードの位置は変わらないので、
【規則2】→【規則1】→【規則3】
と操作したときに「1」が左はしに戻るケースを考えます。

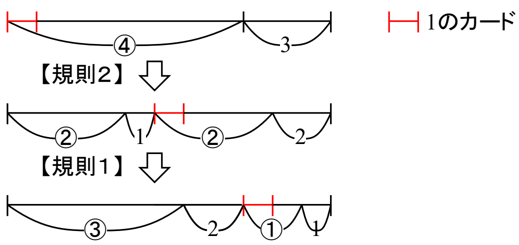
ポイントは【規則1】の操作の直後は右から $\frac{1}{3}$ あたりに「1」がなければならないことです。

そうなると、【規則1】の操作で「1」は右方向に移動したと考えられます。
【規則2】の操作を行ったあと、「1」より左に奇数枚あるのは、
N が「4 の倍数＋2」か「4 の倍数＋3」のケースです。

i)　N＝④＋2 の場合
【規則2】→【規則1】で「1」は右図の位置へ移動します。
N を 3 で割ったときの余りは、
割り切れるときを含めて3通りあるので、
(①＋1)×2＝②＋2
より、以下の3つの式が成り立ちます。
③＋1＝②＋2　→　①＝1　→　N＝6
③＋1＝②＋3　→　①＝2　→　N＝10
③＋1＝②＋4　→　①＝3　→　N＝14



ii)　N＝④＋3 の場合
【規則2】→【規則1】で「1」は右図の位置へ移動し、
(①＋1)×2＝②＋2
より、i) の場合と同様に以下の式が成り立ちます。
③＋2＝②＋2　→　解なし
③＋2＝②＋3　→　①＝1　→　N＝7
③＋2＝②＋4　→　①＝2　→　N＝11



以上より、（あ）に入る数字は 5（通り） となります。

III. 元に戻る可能性があるのは「1」が元に戻る5通りなので、それぞれ調べます。

i）　N＝6 のとき

まず【規則1】の操作を行ったときの「2」の位置を調べます。

	4	3	1	2	

（4回で元に戻ります→4回周期）

次に、【規則2】→【規則1】→【規則3】の操作後の位置関係を調べます。

1	2	3	4	5	6
4	5	6	1	2	3
4	6	2	5	1	3
1	3	4	6	2	5

…（☆1）

（☆1）の並びを【規則1】の操作だけで作れれば、初めの並び方に戻すことが可能です。
初期配置から1回操作を行うと「3」は左から2番目に来ますが、他の配置が異なるので、
（☆1）の配置を【規則1】の操作だけで作ることはできません。

ii）　N＝7 のとき

【規則1】の操作を行ったときの「2」の位置（青字）と「4」の位置（赤字）を調べると、

	3	2	3	1	1	2

（3回周期）

【規則2】→【規則1】→【規則3】の操作後の位置関係を調べると、

1	2	3	4	5	6	7
5	6	7	1	2	3	4
5	7	2	4	6	1	3
1	3	5	7	2	4	6

…（☆2）

（☆2）は、【規則1】の操作を 1 回行った後の位置関係と同じなので、元に戻すことが可能です。
P が最小となるのは【規則1】の操作を合計3回行ったときなので、P の最小値は、

$3-2=1$（回）　※【規則2】→【規則1】→【規則3】→【規則1】の操作で 2 回

となります。以上より、

（い） 7 、（え） 1 　…（答）

iii) N＝10 のとき

【規則1】の操作を行ったときの「2」の位置（青字）と「4」の位置（赤字）を調べると、

	6	5	2	4	1	1	2	3	

（6回周期）

【規則2】→【規則1】→【規則3】の操作後の位置関係を調べると、

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
6	8	10	2	4	7	9	1	3	5
1	3	5	6	8	10	2	4	7	9

…（☆3）

「3」と「5」の位置から、【規則1】の操作 1 回で（☆3）になったとすると、
「6」の位置に「7」がなければならないので不適。

iv) N＝11 のとき

【規則1】の操作を行ったときの「2」の位置を調べると、

	10	9	2	8	6	1	3	7	4	5

（10回周期）

【規則2】→【規則1】→【規則3】の操作後の位置関係を調べると、

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6
7	9	11	2	4	6	8	10	1	3	5
1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10

…（☆4）

（☆4）は、【規則1】の操作を 1 回行った後と同じ位置関係なので、元に戻すことが可能です。
P が最小となるのは【規則1】の操作を合計10回行ったときなので、P の最小値は、

$10-2=8$（回）

となります。以上より、
（う） 11 、（お） 8 …（答）

v) N＝14 のとき

【規則1】の操作を行ったときの「2」の位置を調べると、

	12	11	8	10	3	7	1	9	4	2	5	6	

（12回周期）

【規則2】→【規則1】→【規則3】の操作後の位置関係を調べると、

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
8	9	10	11	12	13	14	1	2	3	4	5	6	7
8	10	12	14	2	4	6	9	11	13	1	3	5	7
1	3	5	7	8	10	12	14	2	4	6	9	11	13

…（☆5）

（☆5）の位置関係は【規則1】の操作だけで作ることはできないので不適。