



I. 説明は以下の通りです。

①の式が整数になるためには、 $N$  が整数のとき

$$N \times (N+1) \times (2 \times N+1) \cdots \textcircled{2}$$

が6の倍数である必要があります。6の倍数の条件は「2の倍数かつ3の倍数」なので、別々に説明します。

i) 2の倍数であることの説明

【整数は偶数または奇数】

- $N$  が偶数ならば②は2の倍数になります。
- $N$  が奇数ならば $(N+1)$ が偶数になるので②は2の倍数になります。

よって②の式は2の倍数です。

ii) 3の倍数であることの説明

【整数は $3 \times n$ 、 $3 \times n - 1$ 、 $3 \times n + 1$ のどれかで表すことができる( $n$ は整数)】

- $N$  が3の倍数( $3 \times n$ )ならば②は3の倍数です。
- $N$  が3の倍数より1小さい数( $3 \times n - 1$ )ならば、 $(N+1)$ は次のように表すことができます。

$$3 \times n - 1 + 1 = 3 \times n$$

$3 \times n$ は3の倍数なので②は3の倍数です。

- $N$  が3の倍数より1大きい数( $3 \times n + 1$ )ならば、 $(2 \times N + 1)$ は次のようにあらわすことができます。

$$\begin{aligned} 2 \times (3 \times n + 1) + 1 &= 6 \times n + 2 + 1 \\ &= 6 \times n + 3 \\ &= 3 \times (2 \times n + 1) \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

③は3の倍数なので、②は3の倍数です。

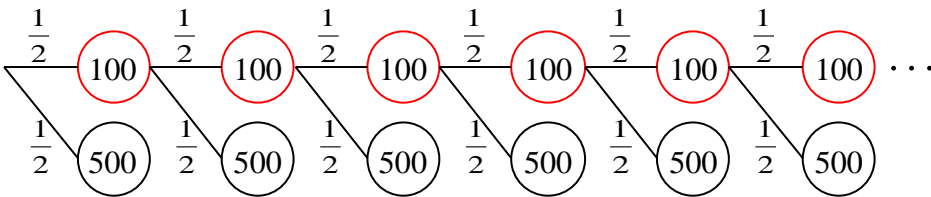
よって②の式は3の倍数です。

以上の検討により、②の式は2の倍数でかつ3の倍数なので、6の倍数であることがわかりました。

よって、①の式は必ず整数になります。

II. <図1>のように、樹形図形風の図を描いて、少し調べてみます。

<図1>



終わる時は全員が 500 円の商品券をもらうので、100 円の商品券を平均でいくらもらえるのかを求め、それを 500 円に足したものが答えになります。

仮に1回で終われば、 $\frac{1}{2}$  の確率で 100 円の商品券がもらえるので、

$$\frac{1}{2} \times 100 = 50 \text{ (円)}$$

となり、2回までならば、

$$\frac{1}{2} \times 100 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 100 = 75 \text{ (円)}$$

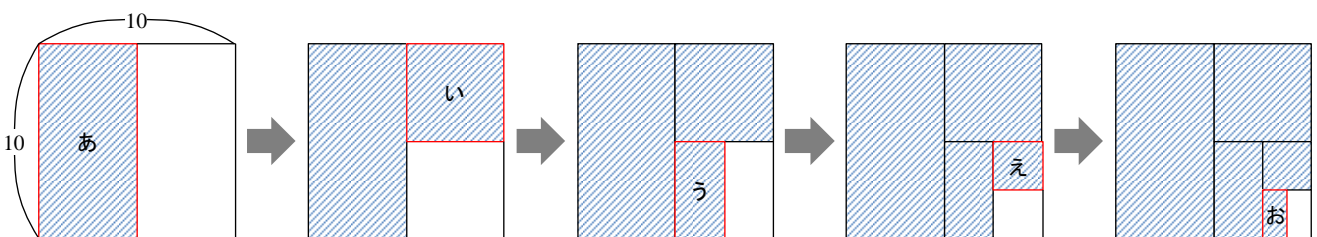
となります。これをずっと続けていくと、

$$\underbrace{\frac{1}{2} \times 100}_{\text{あ}} + \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 100}_{\text{い}} + \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 100}_{\text{う}} + \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 100}_{\text{え}} + \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 100}_{\text{お}} + \dots \text{④}$$

となり、この値がいくつに近づくかがわかれば答を出すことができます。

そこで<図2>のように、 $10 \times 10$  の正方形の面積を半分にするをくり返すことを考えます。

<図2>



④の式のあ～おが、<図2>のあ～おに対応しています。

さらにこの操作をくり返すと、斜線部の面積が  $10 \times 10$  の正方形の面積に近づいていくことがわかります。

よって、この問題の答は

$$500 + 100 = 600 \text{ (円)} \quad \dots \text{(答)}$$

※ 別解

<図1>の作業をずっと続けていくと、100 円の商品券の数と 500 円の商品券の数は等しくなる  
と考えると差し支えありません。

500 円と 100 円が同数ならば

$$500 + 100 = 600 \text{ (円)} \quad \dots \text{(答)}$$