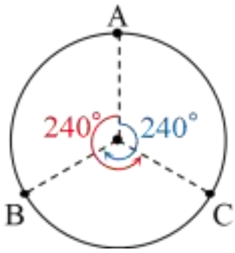
★今週の基本2題★　速さ･規則性　～解説～

I.　池を円と見て、A、B、C それぞれの速さを角度で
あらわすと、
360度÷24分＝15度/分　…A
360度÷12分＝30度/分　…B
360度÷40分＝9度/分　…C
となります。
A を基準にすると、B は時計回りに
$30-15=15$（度/分）
の速さ、C は反時計回りに
$15+9=24$（24 度/分）
の速さとなります。
また、B と C から等しい距離にある点のうち、
最初にスタート地点にある方の点を S とすると、S は
$(24-15)\div 2=4.5$（度/分）
の速さで反時計回りに進むことになります。
B が A から 120 度進むのにかかる時間は
$120\div 15=8$（分）
また、S が A から 180 度進むのにかかる時間は
$180\div 4.5=40$（分）
なので、8 と 40 の最小公倍数である 40 分ごとに、
等間隔に並ぶ可能性があります。
40 分後の位置関係を調べると
$15\times 40\div 360=1$ あまり 240　…B
$24\times 40\div 360=2$ あまり 240　…C
より、〈図１〉のようになり、３人は等間隔に並んでいます。
よって
（答）40 分後

〈図１〉


II.　1 番目から N 番目までの三角数の和の公式があります。

＜公式＞

（1 番目から N 番目までの三角数の和）$= \dfrac{N\times(N+1)\times(N+2)}{6}$

公式に N=50 を代入して

$\dfrac{50\times51\times52}{6} = 22100$　…（答）

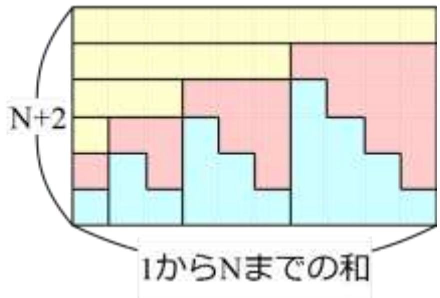
なぜ公式のようになるか考えてみます

◎　その1

1 番目から 4 番目までで考えてみます。
〈図2〉で、と の部分はそれぞれ
三角数になっていますが、
実は の部分も三角数の和になっています。
以上から、
（1 から N までの和）と（N+2）をかけて
3 で割ればよいことがわかります。
よって、1 番目から N 番目までの三角数の和は

$$(1+N)\times N\times\frac{1}{2}\times(N+2)\times\frac{1}{3}=\frac{N\times(N+1)\times(N+2)}{6}$$

〈図2〉



◎　その2

これも 4 番目までで考えてみます。

〈図3〉

1		4		1		6
1　2		3　3		2　1		6　6
1　2　3	＋	2　2　2	＋	3　2　1	→	6　6　6
1　2　3　4		1　1　1　1		4　3　2　1		6　6　6　6

〈図3〉のように、三角数を三角形に並べ、120°ずつ回転させてから
足し合わせると、全ての数が等しくなることがわかります。
1 番目から N 番目までなら、その数は

$1+N+1=N+2$

となります。
よって、1 番目から N 番目までの三角数の和は

$$(N+2)\times(1+N)\times N\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{N\times(N+1)\times(N+2)}{6}$$