★今週の１題★　約数　～解説～

（1）840より1小さい839が素数ならば、839の約数は1と839なので和は840となります。
839が素数かどうかは、
$29 \times 29 = 841$
であることから、839が2から23までのすべての素数でわり切れなければ、素数ということになります。
実際に調べてみると、839は素数であることがわかります。
よって、約数の総和が840になる最も大きい整数は、
(答)839

（2）約数の総和は計算で求めることができます。
例えば60の約数の総和は
$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$
なので、
$(1+2+4) \times (1+3) \times (1+5) = 168$
となります。
840を素因数分解すると、
$840 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$
です。
ここで、約数の総和が840になる整数を X とします。X の約数に2が無いとすると
$(1+3) \times (1+5) \times (1+7) \times (1+11) = 2304$
あるいは
$(1+3+9+27) \times (1+3) \times (1+5) = 960$
より、約数の個数は最大でも $2 \times 2 \times 2$ あるいは 4×2 の8個ということになります。
X の約数に2がある場合は X として次の4通りが考えられます。

① $840 = (1+2) \times (1+13) \times (1+19)$
$X = 2 \times 13 \times 19 = 494$
となり、約数の個数は、
$2 \times 2 \times 2 = 8$（個）

② $840 = (1+2+4) \times (1+3) \times (1+29)$
$X = 2 \times 2 \times 3 \times 29 = 348$
となり、約数の個数は、
$3 \times 2 \times 2 = 12$（個）

③ $840 = (1+2+4) \times (1+5) \times (1+19)$
$X = 2 \times 2 \times 5 \times 19 = 380$
となり、約数の個数は、
$3 \times 2 \times 2 = 12$（個）

④ $840 = (1+2+4+8) \times (1+3) \times (1+13)$
$X = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 13 = 312$
となり、約数の個数は、
$4 \times 2 \times 2 = 16$（個）

以上より、約数の個数が最大なのは④のときで、
(答)312、16個

〈参考〉

約数の総和が 840 になる整数をすべて求めると以下のようになります。

$\underline{312}$

$\underline{348}$

$\underline{380}$

$\underline{494}$

$840=(1+5)\times(1+139) \quad \Rightarrow \quad 5\times139=\underline{695}$

$840=(1+13)\times(1+59) \quad \Rightarrow \quad 13\times59=\underline{767}$

$840=(1+19)\times(1+41) \quad \Rightarrow \quad 19\times41=\underline{779}$

$\underline{839}$