★今週の１題★　数列　～解説～

まず、グループ分けをします。

$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	
$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2},\frac{1}{4}$	$\frac{6}{1},\frac{4}{3},\frac{2}{5}$	$\frac{7}{2},\frac{5}{4},\frac{3}{6},\frac{1}{8}$	$\frac{10}{1},\frac{8}{3},\frac{6}{5},\frac{4}{7},\frac{2}{9}$	$\frac{11}{2},\frac{9}{4},\frac{7}{6},\frac{5}{8},\frac{3}{10},\frac{1}{12}$	$\frac{14}{1},\frac{12}{3},\frac{10}{5},\frac{8}{7},\frac{6}{9},\frac{4}{11},\frac{2}{13}$	…

以下のことを把握しておきます

① グループの番号とそのグループに入る分数の個数は等しい。

② グループの番号が奇数の場合、そのグループの分数の分母は前から、「1，3，5，…」と奇数が入り、分子は後ろから「2，4，6，…」と偶数が入る。

③ グループの番号が偶数の場合、そのグループの分数の分母は前から、「2，4，6，…」と偶数が入り、分子は後ろから「1，3，5，…」と奇数が入る。

④ 同じグループ内では、分子と分母の和は等しく、それはグループの番号の2倍に1を足したものである。

⑤ 各グループの最後の分数が1番目から数えて何番目かを調べると、それは「三角数」になっている。

（１） 200に近い三角数は19番目の190なので、19グループの最後が190番目の分数と分かります。よって、求める分数は、20グループの前から10番目です。
10番目の偶数は20で、分子と分母の和は、
$20\times2+1=41$
ですから、分子は、
$41-20=21$
となり、200番目の分数は、$\frac{21}{20}$…（答）

（２） 1番目から、それぞれのグループの最後の分数まで全部かけ合わせるとどうなるかを調べます。

グループ	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	…
積	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2\times6}{1\times5}$	$\frac{3\times7}{4\times8}$	$\frac{2\times6\times10}{1\times5\times9}$	$\frac{3\times7\times11}{4\times8\times12}$	$\frac{2\times6\times10\times14}{1\times5\times9\times13}$	…

$\frac{6\times10\times14\times18\times22\times26\times30\times34}{1\times5\times9\times13\times17\times21\times25\times29}$…①
の中で最大の数字は34なので、少なくとも17グループの途中まではかける必要があります。
また、分母の最大の数字が29なので、17グループの最後まではかけていないことがわかります。
17グループの最後までかけ合わせると、
$\frac{2\times6\times10\times14\times18\times22\times26\times30\times34}{1\times5\times9\times13\times17\times21\times25\times29\times33}$…②
となります。

①と②を比較すると、①に$\frac{2}{33}$をかけると②になることがわかります。

$\frac{2}{33}$は17グループの最後の分数なので、積が①になるのは17グループの16番目までをかけたときです。
よって、

$N=(1+17)\times17\times\frac{1}{2}-1=152$…（答）

＜書き出して確かめる＞
16 グループまでの積は、

$$\frac{3\times7\times11\times15\times19\times23\times27\times31}{4\times8\times12\times16\times20\times24\times28\times32}$$

で、17 グループの分数は、

$$\frac{34}{1},\frac{32}{3},\frac{30}{5},\frac{28}{7},\frac{26}{9},\frac{24}{11},\frac{22}{13},\frac{20}{15},\frac{18}{17},\frac{16}{19},\frac{14}{21},\frac{12}{23},\frac{10}{25},\frac{8}{27},\frac{6}{29},\frac{4}{31},\frac{2}{33}$$

です。
①の分子に 31 がないことと、分母に 33 がないことから、17 グループの 16 番目までかけたことは明白です。
順番にかけていって確かめてみても良いでしょう。
最終的には 17 グループの 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 番目の積が①になっています。