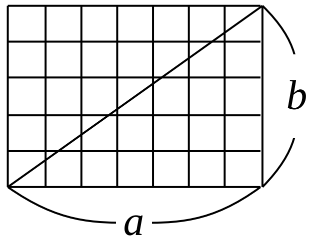
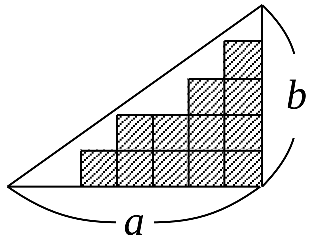
★今週の1題★　整数問題　～解説～



まず、この問題を一般化しておきます。
よこ a 個、たて b 個の正方形をしきつめた長方形の対角線が通る正方形の個数は

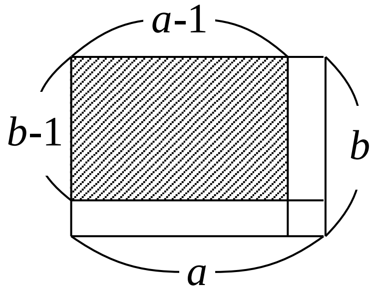
$a+b-1$（個）（ただし、a と b は互いに素）

になることが知られています。



それを利用して、底辺が a cm、高さが b cm の直角三角形の中に 1 辺が 1cm の正方形を何枚並べることができるかというと、

$$\{a\times b-(a+b-1)\}\div 2$$
$$=\frac{a\times b-a-b+1}{2}$$
$$=\frac{(a-1)\times(b-1)}{2}\text{（個）}\quad\cdots①$$



となります。

（１）　①の式に、100、81 をそれぞれ代入して

$$\frac{(100-1)\times(81-1)}{2}=3960\text{（個）}\quad\cdots\text{（答）}$$

（２）　m と n が互いに素な場合と、素でない場合に分けて考えます。

i）　m と n が互いに素な場合

$$\frac{(m-1)\times(n-1)}{2}=57$$

なので、

$$(m-1)\times(n-1)=114$$

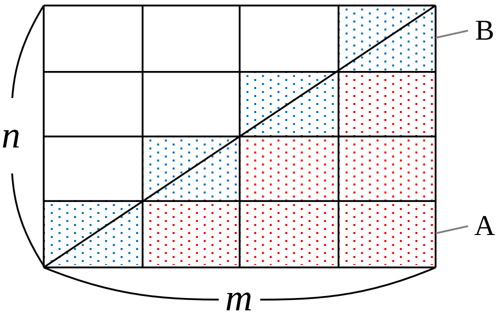
この式を満たす m と n をしらべると、

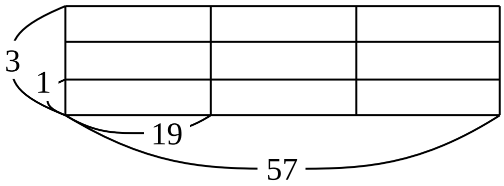
$m-1$	$n-1$	$(m,\ n)$
114	1	(115, 2)
57	2	(58, 3)
38	3	(39, 4)
19	6	(20, 7)

となり、
(115, 2)、(58, 3)、(39, 4)、(20, 7) が答であることがわかります。

ii） m と n が互いに素でない場合
〈図1〉は m と n の共通の約数が 4 で、
4×4 に分割した様子を表しています。
共通の約数があるときは〈図1〉の要領で
分割することができます。
対角線が通っていない長方形を A、
通っている長方形を B として調べます。

〈図1〉





① B に対角線が通っていない正方形が無い場合
$57=3\times19$
なので、A が 1×19 のケースがあります。
よって
(57, 3)も答の1つです。

② B に対角線が通っていない正方形がある場合
n が 2 以上になるので、A の最小は 2×3 の 6 になります。
4番目の三角数は 10 なので
$57<6\times10$
なので、共通な約数は(2, 3, 4)だけを考えればよいことになります。
以下、表にまとめて調べます。

共通な約数	A の数	B の数	(よこ, たて)	(m, n)
2	1	2		
3	3	3	(5, 3)	(15, 9)
4	6	4		

(15, 9)も答の1つであることがわかります。